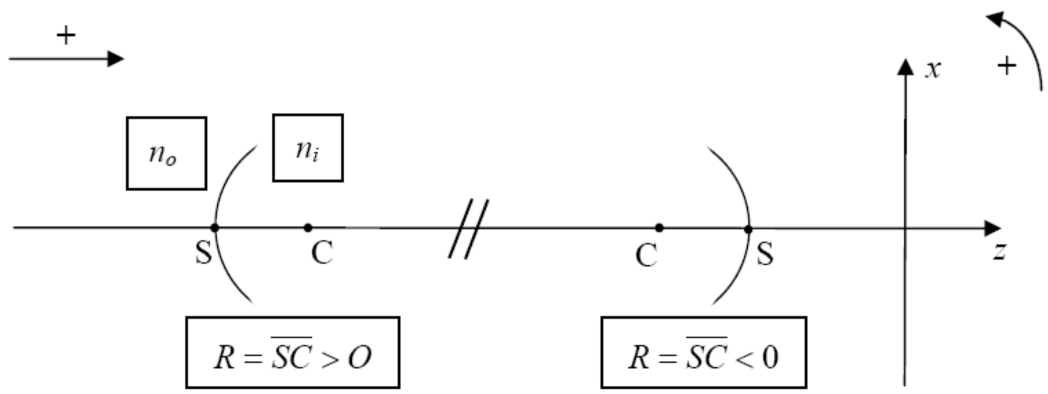
Chapitre 4 : Dioptre et miroir sphériques dans les conditions de Gauss

I. Définition

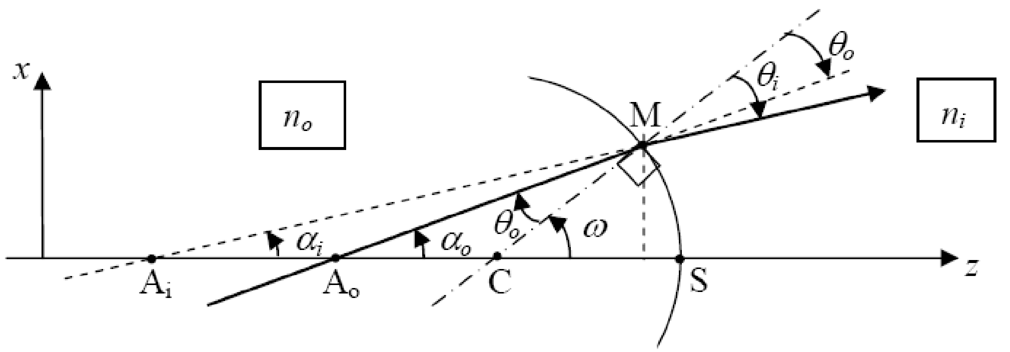
Un dioptre sphérique est une surface sphérique, de centre *C*, de rayon *R*, séparant deux milieux transparents d'indices différents. Le dioptre possède le *poli spéculaire* : les écarts locaux à la sphéricité sont petits devant la longueur d'onde. Du fait des conditions de Gauss le dioptre est en fait limité à une calotte sphérique de sommet *S* et de dimension petite devant le rayon de courbure.

Convention



II. Relation de conjugaison d'un dioptre sphérique

Dans le cadre de l'approximation de Gauss, il y a stigmatisme approché pour tout point de l'axe, c'est-à-dire que tout point A_0 a une image (un point conjugué), et qu'il existe une relation liant la position de A_i à celle de A_0 indépendante de l'inclinaison des rayons lumineux qui passent par A_0.



$$\omega = \alpha_o - \theta_o \qquad \theta_o = \alpha_o - \omega \quad \text{et} \qquad n_i\theta_i = n_o\theta_o$$

$$\omega = \alpha_i - \theta_i \qquad \theta_i = \alpha_i - \omega \qquad n_i(\alpha_i - \omega) = n_o(\alpha_o - \omega)$$

dans l'approximation de Gauss on peut écrire :

$$n_i\left(\frac{x}{\overline{A_iS}}-\frac{x}{\overline{CS}}\right)=n_o\left(\frac{x}{\overline{A_oS}}-\frac{x}{\overline{CS}}\right)$$, c'est-à-dire $$\frac{n_o}{\overline{A_oS}}-\frac{n_i}{\overline{A_iS}}=\frac{n_o-n_i}{\overline{CS}}$$

Soit, en prenant pour origine le sommet du dioptre :

$$\frac{n_i}{\overline{SA_i}}-\frac{n_o}{\overline{SA_o}}=\frac{n_i-n_o}{\overline{SC}}=\frac{n_i-n_o}{R}$$

$\frac{n_i}{SA_i}-\frac{n_0}{SA_0}=V$ qui constitue la relation de conjugaison du dioptre ;

Avec $V=\frac{n_i-n_0}{R}$ est la ***vergence du dioptre***

La relation précédente est algébrique, V a une valeur indépendante du sens de propagation de la lumière : n_i-n_0 et R changent de signe en même temps. La vergence d'un dioptre est une propriété intrinsèque, elle s'exprime en **dioptrie(s)** (δ) dans le système S.I (1δ= $1m^{-1}$).

1. Signification physique de la vergence

En introduisant V dans les relations de départ on obtient

$n_i\alpha_i = n_o\alpha_o + (n_i - n_o)\omega$, soit

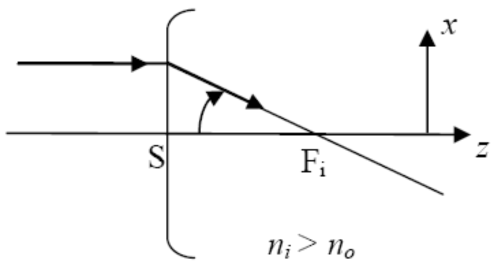
$$n_i\alpha_i = n_o\alpha_o - \frac{n_i-n_o}{\overline{SC}}x$$

$$n_i\alpha_i = n_o\alpha_o - Vx$$

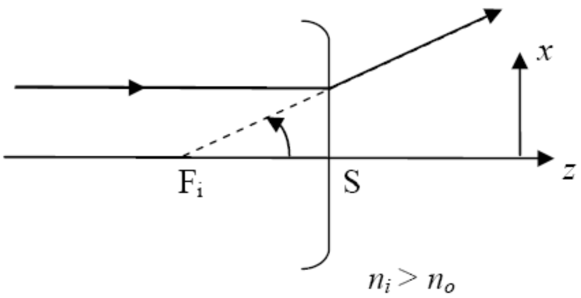
Soit un rayon incident parallèle à l'axe ($\alpha_0 = 0$) et tel que x > 0

$V > 0$: dioptre convergent, alors $\alpha_i < 0$

$V < 0$: dioptre divergent, alors $\alpha_i > 0$



Dioptre Cv



Dioptre Dv

2. Foyers – distances focales

Les longueurs focales, ou ***focales image*** et ***objet*** sont les longueurs algébriques définies respectivement par les relations ci-dessous :

$$f_i=\frac{n_i}{V} \text{ et } f_0=-\frac{n_0}{V}$$

3. Foyer image : c'est le conjugué du point objet à l'infini sur l'axe optique

$$\frac{n_i}{\overline{SF_i}} = V \; ; \; \overline{SF_i} = \frac{n_i}{V} = f_i$$

4. Foyer objet : c'est le conjugué du point image à l'infini sur l'axe optique

$$-\frac{n_0}{\overline{SF_0}} = V \; ; \; \overline{SF_0} = -\frac{n_0}{V} = f_0$$

Autres expressions de la relation de conjugaison

En reportant $\overline{SF_i} = \frac{n_i}{V}$ et $\overline{SF_o} = -\frac{n_o}{V}$ dans la relation de conjugaison on obtient immédiatement :

$$\boxed{\frac{\overline{SF_i}}{\overline{SA_i}} + \frac{\overline{SF_o}}{\overline{SA_o}} = 1} \text{ ou encore } \boxed{\frac{f_i}{p_i} + \frac{f_o}{p_o} = 1}$$

en posant $\overline{SA_i} = p_i$ et $\overline{SA_o} = p_o$

on établirait de même : $\boxed{\overline{F_iA_i}.\overline{F_oA_o} = \overline{SF_i}.\overline{SF_o} = f_i f_o}$ (Newton)

III. Miroirs sphériques

Avec pour sens positif celui de la lumière à l'entrée la loi de la réflexion $i_2 = -i_1$ peut-être considéré comme un cas particulier de celle de la réfraction $n_0 \sin(i_0) = n_i \sin(i_i)$ où on poserait

$n_i = -n_o$. Les relations établies pour le dioptre sphérique se transposent alors immédiatement dans le cas du miroir sphérique.

$$\frac{n_i}{\overline{SA_i}} - \frac{n_o}{\overline{SA_o}} = \frac{n_i - n_o}{\overline{SC}} = \frac{n_i - n_o}{R} = V \;\Rightarrow\; V = -\frac{2n}{R}$$

$$\boxed{\frac{1}{\overline{SA_i}} + \frac{1}{\overline{SA_o}} = \frac{2}{R}}$$

$$\overline{SF_i} = \overline{SF_o} = \boxed{\frac{R}{2} = f_i = f_o = f}$$

$$\frac{\overline{SF_i}}{\overline{SA_i}} + \frac{\overline{SF_o}}{\overline{SA_o}} = 1 \text{ ou } \frac{f_i}{p_i} + \frac{f_o}{p_o} = 1$$

$$\overline{F_iA_i}.\overline{F_oA_o} = f_i f_o = f^2$$